

同步练习 P256 二 1. 理学院 廖国勇 2016.5.31

1. 求微分方程 $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$ 的通解.

解: 分离变量 $\frac{-1}{x^2 - 4x} dx = \frac{1}{y} dy$

两边积分 $\int \frac{-1}{x^2 - 4x} dx = \int \frac{1}{y} dy$

即 $\frac{1}{4} \ln \frac{x}{4-x} = \ln \left(\frac{x}{4-x} \right)^{\frac{1}{4}} = \ln(C_1 y)$

$$\frac{x}{4-x} = C_1^4 y^4$$

化简 $(4-x)y^4 = \frac{1}{C_1^4} x = Cx \quad (C = \frac{1}{C_1^4})$

注 $\int \frac{1}{x} dx$ $\int \frac{1}{y} dy$ 可以不用加绝对值直接写成 $\ln x$ 与 $\ln y$

理由如下: $\int \frac{1}{x} dx = \int f(y) dy$ (设 $F'(y) = f(y)$)

$$\ln|x| = \int f(y) dy \Rightarrow |x| = e^{\int f(y) dy}$$

$$\text{或 } x = \pm e^{\int f(y) dy} = \pm e^{F(y) + C}$$

$$= \pm e^C \cdot e^{F(y)}$$

$$= C \cdot e^{F(y)}$$

这里 $C = \pm e^C$

也就是说常数 C 可以吸含绝对值的内容, 当然, 你加上绝对值完全 OK, 只不过计算稍微复杂些.

同步练习 P₂₅₆ 二.2 理学院 廖国勇 2016.5.31

2. 求微分方程 $(1+x^2)y' = \arctan x$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解

解: 由 $(1+x^2)y' = \arctan x$ 知 $y' = \frac{\arctan x}{1+x^2}$

$$\text{所以 } y = \int y' dx = \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$$

$$\text{又 } y|_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} (\arctan 0)^2 + C \Rightarrow C = 0$$

故 $y = \frac{1}{2} (\arctan x)^2$ 即为所求的特解

记

1. 特解, 就是特定的某个解

2. 通解. n 阶微分方程含有 n 个独立任意常数的解。 n 个常数都已确定的解为特解。从通解到特解一般要 n 个初始条件 (即 n 个方程)。

同步练习 P257. 3 廖国勇

3. 质量为 1kg 的物体, 受力的作用直线^{运动}运算, 此力与时间成正比, 与物体的速度成反比, 当 $t=1\text{s}$ 时, 速度为 8m/s , 力为 $\frac{1}{8}\text{N}$, 试问什么时候物体的速度为 12m/s

解: 设 $F(t)$, $v(t)$ 分别表示 t 时刻的力和速度, 由题意知 $F(t) = k \frac{t}{v(t)}$

由已知 $v(1) = 8$ $F(1) = \frac{1}{8}$ 得 $\frac{1}{8} = k \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow k = 1$, 所以 $F(t) = \frac{t}{v(t)}$

由力学知识, $F(t) = ma = 1 \times a = a = v'(t) \Rightarrow \frac{t}{v(t)} = v'(t)$

$\Rightarrow t = v(t)v'(t)$, 两边积分得 $\int t dt = \int v(t)v'(t) dt$

即 $\frac{1}{2}v(t)^2 = \frac{1}{2}t^2 + C$ 把 $v(1) = 8$ 代入 $\frac{1}{2} \cdot 8^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + C \Rightarrow C = \frac{63}{2}$

所以 $v(t) = \sqrt{t^2 + 63}$, 令 $v(t) = 12 \Rightarrow 12 = \sqrt{t^2 + 63} \Rightarrow t = 9$

即时间为 9 秒时候物体的速度为 12m/s 。

注, 以上的求解基于这样一个思路: 力的方向与速度的方向相同, 即速度越来越大。若力的方向与速度的方向相反, 即速度越来越小, 下面就该情况进行求解。

解: $F(t) = k \frac{t}{v(t)}$ $v(1) = 8$, $F(1) = -\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{1}{8} = k \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow k = -1$

$\Rightarrow F(t) = -\frac{t}{v(t)} \Rightarrow ma = a = v'(t) = -\frac{t}{v(t)}$

$\Rightarrow -v(t)v'(t) = t \Rightarrow \int -v(t)v'(t) dt = \int t dt$

$\Rightarrow C - \frac{1}{2}v(t)^2 = \frac{1}{2}t^2$ 由 $v(1) = 8 \Rightarrow C = \frac{65}{2}$

$\Rightarrow v(t) = \sqrt{65 - t^2} \quad (0 \leq t \leq \sqrt{65})$

$\sqrt{65-65} \leq v(t) \leq \sqrt{65}$ 即 $0 \leq v(t) \leq \sqrt{65}$

这种情况达不到 $v(t) = 12\text{m/s}$, 故该情况舍去

同步练习 P257 4 5 P258 6 华东交通大学 理学院 廖国勇

4. 求微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ 的通解

解: 设 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$ $y' = u'x + u$ 代入原方程得 $u'x + u = u + \tan u$

$$\text{整理} \quad \frac{1}{\tan u} du = \frac{1}{x} dx \quad \text{两边积分} \quad \int \frac{\cos u}{\sin u} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\text{即} \quad \sin u = Cx \quad \therefore \quad \sin \frac{y}{x} = Cx$$

5. 求微分方程 $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = e^2$ 的特解

解: 设 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$ $y' = u'x + u$ 代入原方程得 $u'x + u = u \ln u$

$$\text{分离变量} \quad \frac{1}{u(\ln u - 1)} du = \frac{1}{x} dx \quad \text{两边积分} \quad \int \frac{1}{u(\ln u - 1)} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(\ln u - 1) = \ln Cx \Rightarrow \ln u = Cx + 1 \Rightarrow u = e^{Cx+1}$$

$$\text{即} \quad \frac{y}{x} = e^{Cx+1} \quad y|_{x=1} = e^2 \quad \text{代入得} \quad \frac{e^2}{1} = e^{C \cdot 1 + 1} \Rightarrow C = 1$$

$$\therefore y = x e^{Cx+1} = x e^{x+1}$$

6. 求微分方程 $y' + y \tan x = \sin 2x$ 的通解

$$\text{解:} \quad y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sin 2x e^{\int \tan x dx} dx + C \right)$$

$$= \cos x \left(\int \sin 2x \cdot \frac{1}{\cos x} dx + C \right)$$

$$= \cos x \left(\int 2 \sin x dx + C \right)$$

$$= -2 \cos^2 x + C \cos x$$

同步练习 p258 7. 理学院 廖国勇 2016. 5. 31

求微分方程 $y' = \frac{y}{x+y^3}$ 的通解

解: 由 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y} = \frac{1}{y}x + y^2$

即 $x' = \frac{1}{y}x + y^2 \quad x' + (-\frac{1}{y})x = y^2$

把 x 看成因变量, y 看成自变量, $P(y) = -\frac{1}{y} \quad Q(y) = y^2$

利用一阶线性微分方程公式

$$x = e^{-\int P(y) dy} \left(\int Q(y) e^{\int P(y) dy} dy + C \right)$$

$$= e^{-\int -\frac{1}{y} dy} \left(\int y^2 e^{\int -\frac{1}{y} dy} dy + C \right)$$

$$= y \left(\int y^2 \frac{1}{y} dy + C \right)$$

$$= y \left(\frac{1}{2} y^2 + C \right) = \frac{1}{2} y^3 + Cy$$

注, 在微分方程中, 要打破惯性常识, 如 y 是因变量

x 是自变量。其实谁做自变量, 谁做因变量一样。

x 与 y 仅是两个变元符号。

同步练习 P258 8 理学院 廖国勇 2016.5.31

8. 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$

解: $P = [f(x) - e^x] \sin y$ $Q = -f(x) \cos y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = [f(x) - e^x] \cos y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -f'(x) \cos y$$

由题意知, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 即 $[f(x) - e^x] \cos y = -f'(x) \cos y$

化简 $f'(x) + f(x) = e^x$ (一阶线性微分方程)

$$f(x) = e^{-\int 1 dx} \left(\int e^x \cdot e^{\int 1 dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-x} \left(\int e^{2x} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^x + C e^{-x}$$

由 $f(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} e^0 + C e^{-0} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

于是 $f(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$

同步练习 P259 9

9. 求微分方程 $y' - y = xy^2$ 的通解 (伯努利方程)

解: 设 $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$, 原方程化为 $z' + z = -x$

$$z = e^{-\int p(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right) = e^{-\int dx} \left(\int -x e^{dx} + C \right) \\ = e^{-x} \left(\int -x e^x dx + C \right) = e^{-x} (e^x - x e^x + C) = 1 - x + C e^{-x}$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 - x + C e^{-x}}$$

10. 求微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解

解: $x^2 y' + xy = y^2$ 化为 $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} y^2$ (贝努里方程)

设 $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$, $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} y^2$ 化为 $z' - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{x^2}$

$$z = e^{-\int p(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right)$$

$$= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -\frac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= x \left(\int -\frac{1}{x^3} dx + C \right)$$

$$= x \left(+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C \right) = Cx + \frac{1}{2x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{Cx + \frac{1}{2x}} = \frac{2x}{2Cx^2 + 1}$$

$$y|_{x=1}=1 \Rightarrow 1 = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot C \cdot 1^2 + 1} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

同步练习 P259 11 理学院 廖国勇 2016.5.31

11. 求微分方程 $xy^2 dx + x^2 y dy = 0$ 的通解。

解: 方法一, 分离变量法 $\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} dx = -\int \frac{1}{y} dy$

两边积分 $\int \frac{1}{x} dx = -\int \frac{1}{y} dy \quad \therefore \ln x = \ln \frac{C}{y} \Rightarrow xy = C$

方法二, 全微分法

$$p = xy^2, \quad Q = x^2 y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$u(x, y) = \int xy^2 dx = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \varphi(y) \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 y + \varphi'(y) = x^2 y$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = 0 \quad \text{故 } u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2$$

即 $u(x, y) = C$ 为通解, 即 $\frac{1}{2} x^2 y^2 = C$ (与 $xy = C$ 等价)

方法三, ~~用贝努里方程~~ 一阶线性微分方程 (齐次)

$$xy^2 dx + x^2 y dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \text{即 } y' + \frac{1}{x} y = 0$$

$$y = c e^{-\int p(x) dx} = c e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{c}{x}$$

$$\therefore xy = C$$